Der Differenzenquotient

Ein Maß für die Steigung

Wir nehmen eine Funktion $f(x)$ und wollen wissen: wie stark verändert sie sich in einem Punkt, und zwar an der Stelle x.

Dazu wählen wir einen winzigen Wert Δx.
Dieser Wert ist die Veränderung von x.

Wir haben jetzt einen x-Wert und einen neuen etwas veränderten Wert, nämlich $x + \Delta x$

Jetzt berechnen wir die dazugehörigen $f(x)$-Werte.
Sie heißen $f(x)$ und $f(x + \Delta x)$

Wir ziehen den alten Wert $f(x)$ vom neuen $f(x + \Delta x)$
Ab und teilen das durch Δx,
das nennt man **Differenzenquotient** und schreibt

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Beispiel:

$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x$ an der Stelle $x = 1{,}2$

$$\Delta x = 0{,}001$$

$$x = 1{,}2 \;\; und \; x + \Delta x = 1{,}201$$

$$f(x) = f(1{,}2) = -\frac{2}{3} \cdot 1{,}2^3 + 6 \cdot 1{,}2 = 6{,}048$$

$$f(x + \Delta x) = f(1{,}201) = -\frac{2}{3} \cdot 1{,}201^3 + 6 \cdot 1{,}201$$

$$f(x + \Delta x) \approx 6{,}051118$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{6{,}051118 - 6{,}048}{0{,}001} = 3{,}1176$$

Unser **Differenzenquotient** $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ liefert einen Wert für einen bestimmten Wert von Δx.

Das ist aber nicht genau an der Stelle x.

Es wird umso genauer und kommt auf den Punkt, wenn Δx immer kleiner und kleiner wird.

Was geschieht denn mit dem **Differenzenquotient** $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, wenn Δx jetzt ganz verschwindet. Darf $\Delta x = 0$ werden?

So geht es leider nicht. Wir schauen, was passiert eigentlich, wenn Δx immer kleiner und kleiner wird. Wir schauen uns den Prozess an, ob er an eine Grenze läuft. Man schreibt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Beispiel: $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x$ an der Stelle $x = 1{,}2$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3{,}1176$$

$\Delta x = 0{,}00001$

$\Delta x = 0{,}0000000001$ usw.

$$\Delta x = 0 \leftrightarrow f(x) = f(1{,}2) \quad f(x+\Delta x) = f(1{,}2+0) = f(1{,}2)$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1{,}2)-f(1{,}2)}{0} = \frac{0}{0} = Error$$

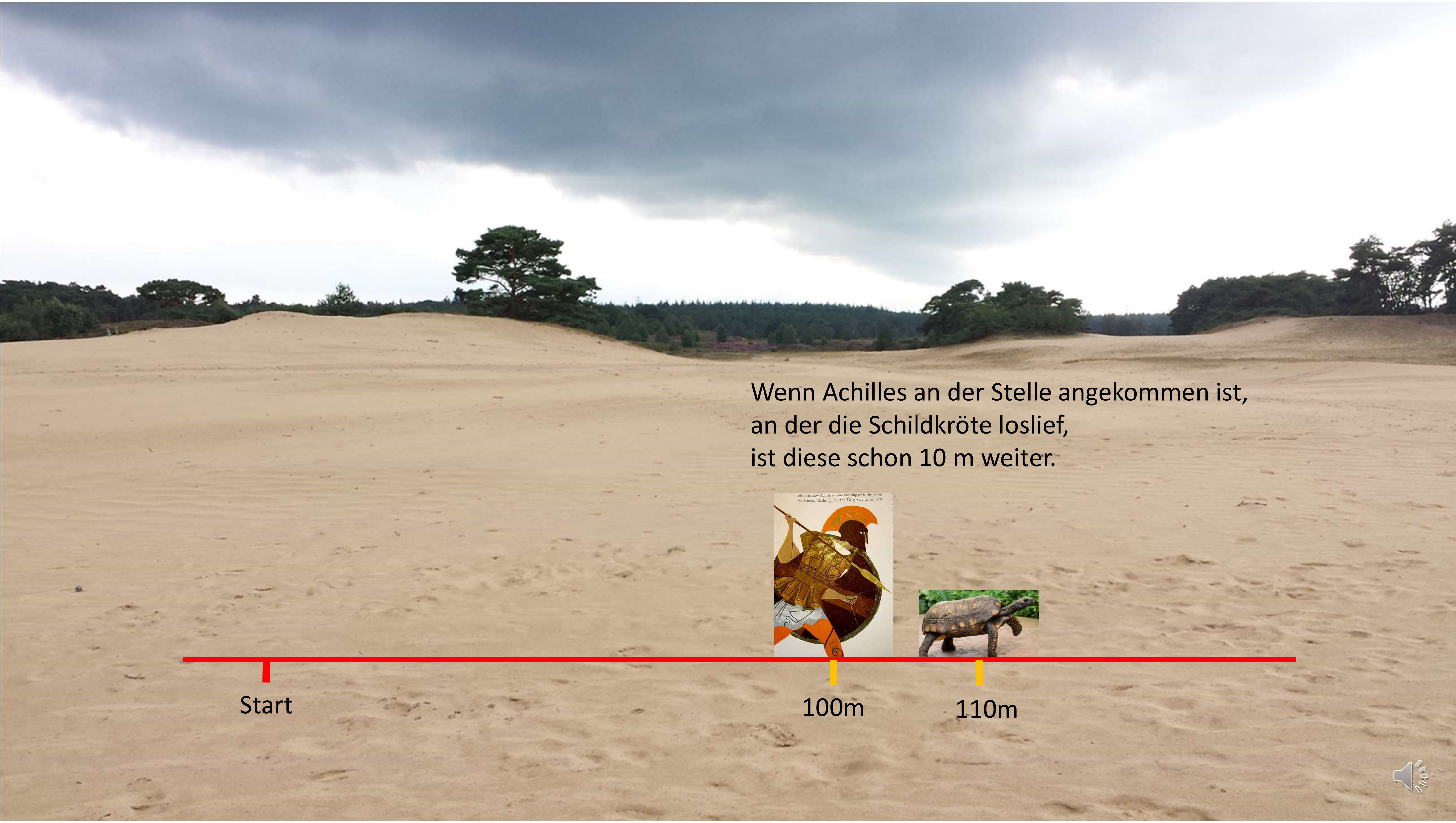
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1{,}2+\Delta x)-f(1{,}2)}{\Delta x}$$

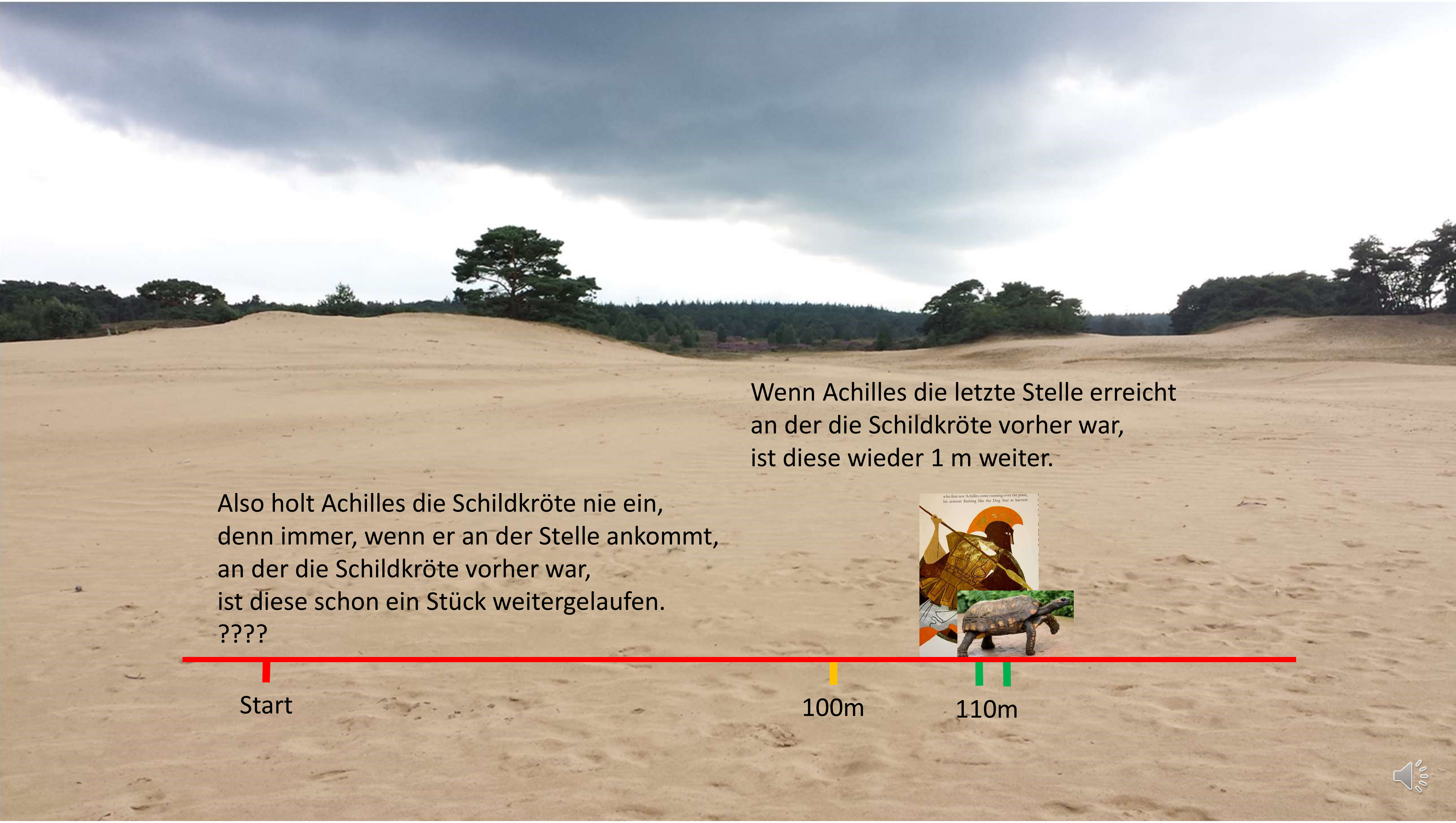
Um jetzt weiterzukommen, beschäftigen wir uns ein wenig mit

Grenzwertbetrachtungen


Achill und die Schildkröte
Ein Paradoxon von Xenon


Die Schildkröte und Achilles bestreiten einen Wettlauf.
Die Schildkröte ist sich sicher, dass sie nicht einzuholen ist.
Achilles ist 10 mal so schnell wie die Schildkröte
Die Schildkröte erhält 100m Vorsprung
Start
100m


Wenn Achilles an der Stelle angekommen ist,
an der die Schildkröte loslief,
ist diese schon 10 m weiter.
Start
100m
110m


Wenn Achilles die letzte Stelle erreicht
an der die Schildkröte vorher war,
ist diese wieder 1 m weiter.
Also holt Achilles die Schildkröte nie ein,
denn immer, wenn er an der Stelle ankommt,
an der die Schildkröte vorher war,
ist diese schon ein Stück weitergelaufen.
????
Start
100m
110m


Eine anschauliche Lösung und mehr Hintergründe findet Ihr in dem unten angegebenen Youtube-Video.
Mathematik zum Anfassen - Wann überholt Achilles die Schildkröte? (2. Staffel, 6. Folge)
https://www.youtube.com/watch?v=KoK9j3odb0M